Annales
de mathématiques
du baccalauréat scientifique
Édition 2019

Sujets & corrigés détaillés

Éric Guirbal

Éric Guirbal
Professeur indépendant de mathématiques
Toulouse
eric.guirbal@lecons-de-maths.fr
www.lecons-de-maths.fr

Ce document est disponible à l'adresse
http://www.lecons-de-maths.fr/ressources/cours-et-exercices#annales_bac_s

Version du 21 juin 2019

Sommaire

1 Amérique du Nord **1**
Énoncé 1
Corrigé 9

2 Liban **19**
Énoncé 19
Corrigé 27

3 Centres étrangers & Pondichéry **29**
Énoncé 29
Corrigé 39

4 Antilles Guyanne **41**
Énoncé 41
Corrigé 49

5 Polynésie **51**
Énoncé 51
Corrigé 52

6 Asie **53**
Énoncé 53
Corrigé 54

7 Métropole **55**
Énoncé 55
Corrigé 57

Sujet 1

Amérique du Nord

28 mai 2019

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice et sauf mention contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Une usine fabrique des tubes.

Partie A

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

On s'interesse à deux types de tubes, appelés tubes de type 1 et tubes de type 2.

1. Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètres et 1,65 millimètres.

   a) On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.

   On prélève au hasard un tube de type 1 dans la prouction de la journée. Calculer la probabilité que le tube soit accepté au contrôle.

   b) L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1. Pour cela, on modifie le réglage des machines produisant ces tubes. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé dans la production issue de la machine modifiée, associe son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type σ_1.

Un tube de type 1 est prélevé au hasard dans la production issue de la machine modifiée. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à 0,98. (On pourra utiliser la variable aléatoire Z définie par $Z = \frac{X_1 - 1{,}5}{\sigma_1}$ qui suit la loi normale centrée réduite.)

2. Une machine produit des tubes de type 2. Un tube de type 2 est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci, en millimètres, appartient à l'intervalle [298 ; 302]. Le cahier des charges établit que, dans la production des tubes de type 2, une proportion de 2 % de tubes non « conformes pour la longueur » est acceptable.

   On souhaite décider si la machine de production doit être révisée. Pour cela, on prélève au hasard dans la production de tubes de type 2 un échantillon de 250 tubes dans lequel 10 tubes se révèlent être non « conformes pour la longueur ».

   a) Donner un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes.

   b) Décide-t-on de réviser la machine ? Justifier la réponse.

Partie B

Des erreurs de réglage dans la chaîne de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes de type 2. Une étude menée sur la production a permis de constater que :

- 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme ;
- parmi les tubes de type 2 qui ont une epaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ;
- 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

On choisit un tube de type 2 au hasard dans la production et on considère les événements :

- E : « l'épaisseur du tube est conforme » ;

— L : « la longueur du tube est conforme ».

On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré (figure 1).

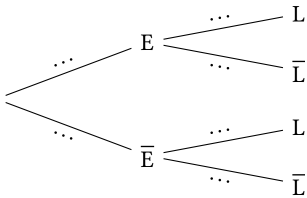

FIGURE 1

1. Recopier et compléter entièrement cet arbre.
2. Montrer que la probabilité de l'événement L est égale à 0,948.

Exercice 2 (4 points)
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1. L'équation $z - \text{i} = \text{i}(z + 1)$ a pour solution $z = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\pi/4}$.

Affirmation 2. Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,; \frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1 + \text{e}^{2\text{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\,\text{e}^{-\text{i}x}$.

Affirmation 3. Un point M d'affixe z tel que $|z - i| = |z + 1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Affirmation 4. L'équation $z^5 + z - \text{i} + 1 = 0$ admet une solution réelle.

Exercice 3 (6 points)
Commun à tous les candidats

Partie A. Établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $\ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B. Application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.
2. *a)* Démontrer par réccurence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
   b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 1$.
   c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $l = f(l)$ où f est la fonction définie dans la partie A. En déduire la valeur de ℓ.
4. *a)* Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partie duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.
   b) Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}.

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN comme sur la figure 2 page suivante.

Plus précisément, les points I, J, K, L et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CHG, ADHE, ABFE et EFGH (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

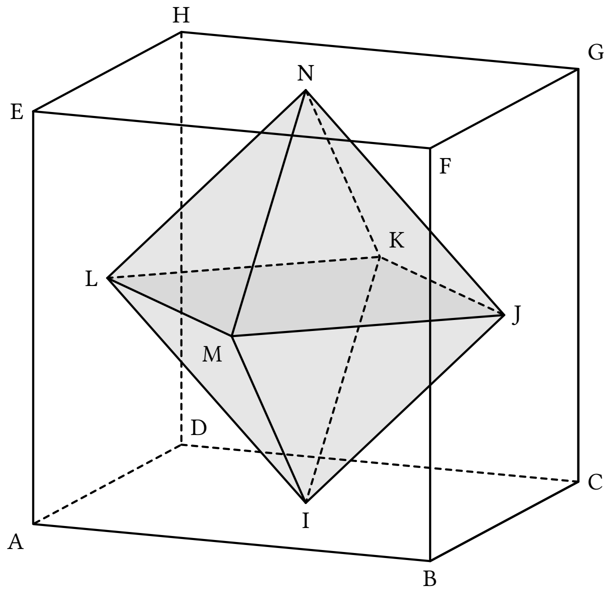

FIGURE 2

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

Dans la suite, on considère le repère orthonormé $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$ dans lequel, par exemple, le point N a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$.

2. *a)* Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{NC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ML}}$.

   b) En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

   c) En déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).

3. *a)* Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est $x - y + z = 1$.

   b) La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.

c) Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux ppoints de la figure.

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si

$$\begin{cases} x \equiv x' \pmod 5 \\ y \equiv y' \pmod 5. \end{cases}$$

Deux matrices carrées d'ordre 2,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$$

à coefficients entiers sont dites congrues moulo 5 si et seulement si

$$\begin{cases} a \equiv a' \pmod 5 \\ b \equiv b' \pmod 5 \\ c \equiv c' \pmod 5 \\ d \equiv d' \pmod 5. \end{cases}$$

Alice et Bob veulent s'échanger des messages en utilisant la procédure décrite ci-dessous.

- Ils choisissent une matrice M carrées d'ordre 2 à coefficients entiers.
- Leur message initial est écrit en lettres majuscules sans accent.
- Chaque lettre de ce message est remplacée par une matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ déduite du tableau 3 page ci-contre : x est le chiffre situé en haut de la colonne et y est le chiffre situé à gauche de la ligne ; par exemple, la lettre T d'un message initial correspond à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	X	Y	Z

FIGURE 3 – *Remarque : la lettre W est remplacée par deux lettres accolées V.*

— On calcule une nouvelle matrice $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en multipliant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à gauche par la matrice M :
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

— On calcule r' et t' les restes respectifs des divisions euclidiennes de x' et y' par 5.

— On utilise le tableau ci-contre pour obtenir la nouvelle lettre correspondant à la matrice colonne $\begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix}$.

1. Bob et Alice choisissent la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que la lettre « T » du message initial est codée par la lettre « U » puis coder le message « TE ».

   b) On pose $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que les matrices PM et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

   c) On considère A, A′ deux matrices d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et $\mathrm{Z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathrm{Z}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers congrues modulo 5. Montrer alors que les matrices AZ et A′Z′ sont congrues modulo 5.

   Dans ce qui suit, on admet que si A, A′ sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et si B, B′ sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congruess modulo 5 alors les matrices produits AB et A′B′ sont congrues modulo 5.

d) On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers. Déduire des deux questions précédentes si MX et Y sont congrues modulo 5 alors les matrices X et PY sont congrues modulo 5 ; ce qui permet de « décoder » une lettre chiffrée par la procédure utilisée par Alice et Bob avec la matrice M choisie.

e) Décoder alors la lettre « D ».

2. On souhaite déterminer si la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ peut être utilisée pour coder un message.

a) On pose $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice RS et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

b) On admet qu'un message codé par la matrice R peut être décodé s'il existe une matrice T telle que les matrices TR et I soient congrues modulo 5. Montrer que si c'est le cas alors les matrices TRS et S sont congrues modulo 5 (par la procédure expliquée en question 1.d pour le codage avec la matrice M).

c) En déduire qu'un message codé par la matrice R ne peut être décodé.

Exercice 1

Commun à tous les candidats

Partie A

1. *a)* La probabilité qu'un tube de type 1 soit accepté au contrôle est égale à $\mathbb{P}(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65)$. À l'aide d'un outil de calcul, nous trouvons, à 10^{-3} près,
$$\mathbb{P}(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65) \approx 0{,}968.$$

   b) Soit Z la variable aléatoire $\frac{X_1-1{,}5}{\sigma_1}$ qui suit la loi normale centrée réduite. On a $1{,}35 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65$ si et seulement si $-\frac{0{,}15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \frac{0{,}15}{\sigma_1}$, d'où
$$\mathbb{P}(1{,}35 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65) = \mathbb{P}\left(-\frac{0{,}15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \frac{0{,}15}{\sigma_1}\right).$$
Compte tenu des propriétés de symétrie de la loi normale centrée réduite et de $\mathbb{P}(1{,}35 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65) = 0{,}98$, nous avons
$$\mathbb{P}\left(Z \leqslant -\frac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathbb{P}\left(-\frac{0{,}15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \frac{0{,}15}{\sigma_1}\right)\right) = \frac{1-0{,}98}{2} = 0{,}01.$$
La calculatrice donne $-0{,}15/\sigma_1 = -2{,}3263\ldots$, d'où $\sigma_1 \approx 0{,}064$ à 10^{-3} près.

2. *a)* Considérons l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard $n = 250$ tubes avec remise telle que la probabilité de tomber sur un tube non « conforme pour la longueur » est égale à $p = 0{,}02$. La variable aléatoire qui a tout échantillon associe le nombre de tubes non conformes suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$. Puisque $n \geqslant 30$, $np = 5 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 245 \geqslant 5$, un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » dans l'échantillon est
$$\begin{aligned}&\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]\\ &= \left[0{,}02 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}02\times(1-0{,}02)}{250}}\,;0{,}02 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}02\times(1-0{,}02)}{250}}\right]\\ &\approx [0{,}002\,;0{,}038].\end{aligned}$$

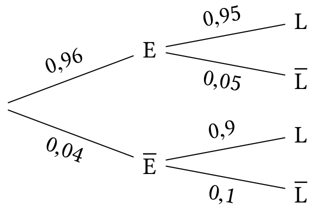

FIGURE 4

b) Testons l'hypothèse « la proportion de tube de type 2 non "conformes pour la longueur" ne dépasse pas 2 % ». La fréquence de tubes non « conformes pour la longueur » dans l'échantillon est égale à $\frac{10}{250} = 0{,}04$. Elle est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique, nous devons donc rejeter l'hypothèse : la machine doit être révisée.

PARTIE B

1. On a $\mathbb{P}(E) = 0{,}96$, $\mathbb{P}_E(L) = 0{,}95$, $\mathbb{P}_E(\overline{L}) = 1 - \mathbb{P}_E(L) = 0{,}05$,

$$\mathbb{P}_{\overline{E}}(L) = \frac{\mathbb{P}(\overline{E} \cap L)}{\mathbb{P}(\overline{E})} = \frac{0{,}036}{0{,}04} = 0{,}9$$

   et $\mathbb{P}_{\overline{E}}(\overline{L}) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{E}}(L) = 0{,}1$. Voir l'arbre de la figure 4.

2. Puisque $0 < \mathbb{P}(E) < 1$, nous pouvons appliquer la formule des probabilités totales ; nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L) &= \mathbb{P}_E(L) \times \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}_{\overline{E}}(L) \times \mathbb{P}(\overline{E}) \\ &= 0{,}05 \times 0{,}96 + 0{,}9 \times 0{,}04 \\ &= 0{,}084.\end{aligned}$$

Exercice 2

Commun à tous les candidats

Affirmation 1. Dans l'équation $z - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z+1)$, séparons les termes connus des termes inconnus ; il vient $(1-\mathrm{i})z = 2\mathrm{i}$, d'où

$$z = \frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{|1-\mathrm{i}|^2} = -1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}.$$

Or $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, donc $\sqrt{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} \neq \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. L'affirmation est fausse.

Affirmation 2. L'affirmation est fausse ; en effet, pour $x = \frac{\pi}{4}$, on a

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = 1 + \mathrm{i}$$

et

$$2\cos x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = 2\cos\frac{\pi}{4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \mathrm{i}.$$

Remarque. Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 2\cos x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

où $2\cos x > 0$, donc $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

Affirmation 3. Soit M un point d'affixe $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b sont deux nombres réels et tel que $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$. Alors $|z-\mathrm{i}|^2 = |z+1|^2$, c'est-à-dire $a^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + b^2$. Après développement et réduction, nous obtenons $a = -b$. Les coordonnées $(a\,;b)$ du point M vérifient donc l'équation $y = -x$ prouvant ainsi que le point M appartient à la droite d'équation $y = -x$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 4. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $z^5 + z + 1 \in \mathbb{R}$, donc $z^5 + z + 1 \neq \mathrm{i}$. Il s'ensuit que l'équation $z^5 + z - \mathrm{i} + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle. L'affirmation est fausse.

Exercice 3

Commun à tous les candidats

Partie A. Établir une inégalité

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

   De $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$, nous déduisons que la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition.

2. Nous savons que $f(0) = \ln 1 = 0$ et que f est croissante. Nous en déduisons que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B. Application à l'étude d'une suite

1. On a

$$u_1 = u_0 - \ln(1+u_0) = 1 - \ln 2,$$
$$u_2 = u_1 - \ln(1+u_1) = 1 - \ln 2 - \ln(2 - \ln 2).$$

   Une valeur approchée de u_2 à 10^{-3} près est 0,039.

2. *a)* Notons $\mathscr{P}(n)$ l'assertion « $u_n \geqslant 0$ ».

   Initialisation. Nous savons que $u_0 = 1$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit k un entier naturel. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire que $u_k \geqslant 0$. Alors $u_{k+1} = u_k - \ln(1+u_k) = f(u_k) \geqslant 0$ d'après la question A.2. L'assertion $\mathscr{P}(k+1)$ est démontrée.

   Conclusion. D'après le principe de récurrence, nous savons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n \geqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

   b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} - u_n = -\ln(1+u_n)$ et, d'après la question précédente, $1 + u_n \geqslant 1$. Or $\ln x \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 1$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Puisque $u_0 = 1$, la décroissante de la suite implique que $u_n \leqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

   c) Nous avons démontré que la suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

3. L'équation $f(x) = x$ équivaut à $\ln(x+1) = 0$, puis $x + 1 = 1$ étant donné que $\ln 1 = 0$ et que la fonction ln est strictement monotone. Il s'ensuit que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $x = 0$, d'où $\ell = 0$.

   Solution alternative. La limite ℓ de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$. Nous savons déjà (question A.2) que 0 est une solution. De plus, la fonction $x \mapsto f(x) - x = -\ln(x+1)$ est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ puisque la fonction ln est strictement croissante. Par conséquent, 0 est l'unique soution de l'équation $f(x) = x$, donc $\ell = 0$.

4. *a)* L'algorithme de la figure 5 permet le calcul du plus petit entier naturel N tel que $u_n \leqslant 10^{-p}$ pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$ où p est un entier naturel donné. Étant donné que la suite (u_n) est décroissante, cela revient à déterminer le plus petit entier N tel que $u_\mathrm{N} \leqslant 10^{-p}$.

fonction CALCULN(p)
  $n \leftarrow 0$
  $u \leftarrow 1$
  tant que $u > 10^{-p}$ **faire**
    $n \leftarrow n + 1$
    $u \leftarrow u - \ln(1+u)$
  retourner n

(a) *Algorithme*

SESSION PYTHON

```
In [1]: import math
In [2]: def calculN(p):
   ...:   eps = 10**(-p)
   ...:   n = 0
   ...:   u = 1
   ...:   while u > eps:
   ...:     n += 1
   ...:     u -= math.log(1 + u)
   ...:   return n
In [3]: calculN(15)
Out[3]: 6
```

(b) *Implémentation en Python et exécution*

FIGURE 5

   b) L'exécution de l'algorithme avec $p = 15$ donne $\mathrm{N} = 6$.

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. [1] Les droites (ML) et (HF) sont parallèles.

   Démonstration. Les points L et M sont respectivement les milieux des côtés [AH] et [AF] du triangle AFH. D'après le théorème des milieux, les droites (ML) et (HF) sont parallèles. □

   [2] La droite (IN) est perpendiculaire à la droite (HF).

   Démonstration. Le point N est le milieu du segment [HF], donc N appartient à la médiatrice du segment [HF]. Considérons les triangles IDH et IBF. Il s'agit de deux triangles rectangles en D et en B respectivement et tels que ID = IB et DH = BF. Nous en déduisons que IH = IF, donc le point I appartient à la médiatrice du segment [HF]. Nous avons démontré que la droite (IN) est la médiatrice du segment [HF], donc les droites (IN) et (HF) sont perpendiculaires. □

   [3] Les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

   Démonstration. Résulte de [1] et [2]. □

2. *a)* On a

$$\overrightarrow{NC}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}.$$

   b) Dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$ est

$$\overrightarrow{NC}\cdot\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 0 = 0,$$

   donc les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

c) La droite (ML) est orthogonale avec les droites distinctes et sécantes (NC) et (IN). Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{\text{ML}}$ est un vecteur normale du plan (NCI). Une équation cartésienne du plan (NCI) est donc $-x+y+d=0$ où d est une constante à déterminer. Le point $\text{A}(0\,;0\,;0)$ appartient à la droite (IC), donc au plan (NCI). Ses coordonnées vérifient l'équation du plan (NCI), d'où $d=0$. Nous concluons qu'une équation cartésienne du plan (NCI) est

$$x-y=0.$$

3. *a)* L'équation $x-y+z=1$ est une équation cartésienne d'un plan. Puisque les coordonnées des points $\text{N}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$, $\text{J}\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $\text{M}\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ vérifient l'équation, celle-ci est donc bien une équation cartésienne du plan (NJM).

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Nous noterons $\equiv$ la congruence entre deux matrices.

1. *a)* La lettre T est représentée par la matrice $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$. Or

$$\text{M}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\times2+0\\5\times4+4\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\pmod 5$$

et la matrice $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ représente la lettre U, donc la lettre T est codée U. De la même manière, on montre que la lettre E est codée O, donc le message « TE » est codé « UO ».

b) On a

$$\text{PM}=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&10\\10&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\times1+1&5\times2+0\\5\times2+0&5\times3+1\end{pmatrix}\equiv\text{I}\pmod 5.$$

c) Soient $\text{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et $\text{A}'=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$. Alors

$$\text{AZ}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\text{A}'\text{Z}'=\begin{pmatrix}a'x'+b'y'\\c'x'+d'y'\end{pmatrix}.$$

Comme A est congrues à A′ et Z congrues à Z′ modulo 5, on a $a\equiv a'\pmod 5$, $b\equiv b'\pmod 5$, $c\equiv c'\pmod 5$, $d\equiv d'\pmod 5$, $x\equiv x'$

(mod 5) et $y \equiv y' \pmod 5$. La compatibilité de la congruence sur $\mathbb{Z}$ avec l'addition et la multiplication permet d'en déduire que

$$ax + by \equiv a'x' + b'y' \pmod 5 \quad \text{et} \quad cx + dy \equiv c'x' + d'y' \pmod 5,$$

donc les matrices AX et A′X′ sont congrues modulo 5.

d) Commençons par démontrer la transitivité de la congruence sur les matrices :

> *Soient* $\mathrm{A} = (a_{ij})$, $\mathrm{B} = (b_{ij})$ *et* $\mathrm{C} = (c_{ij})$ *trois matrices de m lignes et n colonnes telles que* $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B} \pmod 5$ *et* $\mathrm{B} \equiv \mathrm{C} \pmod 5$, *alors* $\mathrm{A} \equiv \mathrm{C} \pmod 5$.

Elle est une conséquence immédiate de la transitivité de la congruence sur $\mathbb{Z}$. En effet, pour tout couple d'entiers (i, j) tel que $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod 5$ et $b_{ij} \equiv c_{ij} \pmod 5$, d'où $a_{ij} \equiv c_{ij} \pmod 5$. La congruence $\mathrm{A} \equiv \mathrm{C} \pmod 5$ est démontrée.

À présent, supposons que $\mathrm{MX} \equiv \mathrm{Y} \pmod 5$. Puisque $\mathrm{P} \equiv \mathrm{P} \pmod 5$, nous avons (question 1.c),

$$\mathrm{PMX} \equiv \mathrm{PY} \pmod 5. \tag{1}$$

On a également $\mathrm{PM} \equiv \mathrm{I} \pmod 5$ (question 1.b) et $\mathrm{X} \equiv \mathrm{X} \pmod 5$, donc (question 1.c)

$$\mathrm{PMX} \equiv \mathrm{X} \pmod 5. \tag{2}$$

Enfin, (1), (2) et la transitivité de la congruence démontrée au début de cette question, nous permettent de conlure que

$$\mathrm{X} \equiv \mathrm{PY} \pmod 5.$$

e) La lettre D est représentée par la matrice $\left(\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right)$. On a

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \pmod 5.$$

La matrice $\left(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right)$ représente la lettre O. La lettre D est donc décodée O.

2. *a)* On a $\mathrm{RS} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$, donc les matrices RS et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

   b) Soient T une matrice telle que $\mathrm{TR} \equiv \mathrm{I} \pmod 5$. Puisque $\mathrm{S} \equiv \mathrm{S} \pmod 5$, alors en appliquant le résultat admis à propos de la compatibilité de la congruence avec le produit des matrices carrées, nous obtenons

$$\mathrm{TRS} \equiv \mathrm{S} \pmod 5.$$

   c) Montrons par l'absurde qu'il n'existe pas de matrice T telle que TR et I soient congrues modulo 5. Supposons donc qu'il existe une telle matrice T. On a alors

$$\mathrm{TRS} \equiv \mathrm{S} \pmod 5.$$

   D'après la question 2.a, on a également

$$\mathrm{TRS} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod 5.$$

   Il s'ensuit que

$$\mathrm{S} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod 5,$$

   d'où

$$2 \equiv 0 \pmod 5.$$

   Or 5 ne divise pas 2, donc il n'existe pas de matrice T telle que TR et I soient congrues.

   Pourtant, nous ne pouvons pas déduire du résultat admis de la question précédente qu'un message codé avec la matrice R ne peut être décodé. En effet, considérons les deux assertions suivantes :

   p : « Il existe une matrice T telle que les matrices TR et I soient congrues modulo 5. »

   q : « Un message codé par la matrice R peut-être décodé. »

   Le résultat admis s'écrit alors

$$p \implies q.$$

   Nous avons démontré que p est faux, et nous ne pouvons pas en déduire que q est faux.

Sujet 2

Liban

31 mai 2019

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1]$ par

$$f(x) = x(1 - \ln x)^2.$$

2. *a)* Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;1]$,
$$f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1).$$

   b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la focntion g définie sur l'intervalle $]0\,;1]$ par
$$g(x) = \ln x.$$

Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a, et l'axe des coordonnées au point P_a.

On s'intéresse à l'aire du triangle $\mathrm{ON}_a\mathrm{P}_a$ quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;1]$.

3. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0{,}2$ et on donne la figure 1 page suivante.

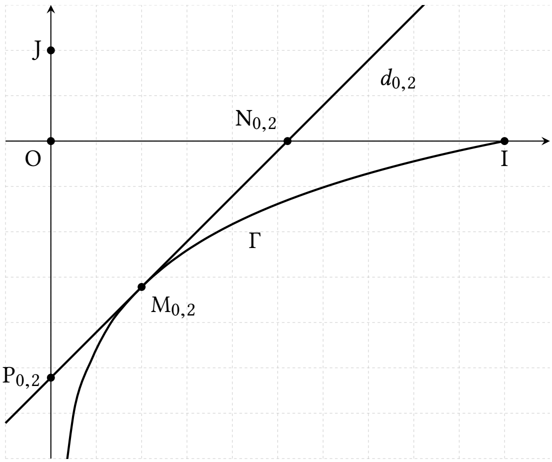

FIGURE 1

a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $\text{ON}_{0,2}\text{P}_{0,2}$ en unités d'aire.

b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $\text{ON}_{0,2}\text{P}_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \frac{1}{2}a(1-\ln a)^2$.

4. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

Exercice 2 (4 points)
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point O et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M′ d'affixe z' tel que $z' = \frac{-1}{z}$.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -1+\text{i}$ et $z_{\text{B}} = \frac{1}{2}\text{e}^{\text{i}\pi/3}$.

a) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A′ image du point A par la fonction f.

b) Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B′ image du point B par la fonction f.

c) Sur la copie, placer les points A, B, A′ et B′ dans le repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Pour les points B et B′, on laissera les traits de construction apparents.

2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   a) Montrer que $z' = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}$.

   b) Est-il vrai que si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M′ par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

3. Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_{\mathrm{K}} = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

   a) Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.

   b) Soit $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.

   c) Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M′ du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A. Soit d la droite orthogonale du plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B. Voir la figure 2 page suivante.

1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

   On appelle *bicoin* un tétraèdre ont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Montrer que le tétraèdre ABCD est un *bicoin*.

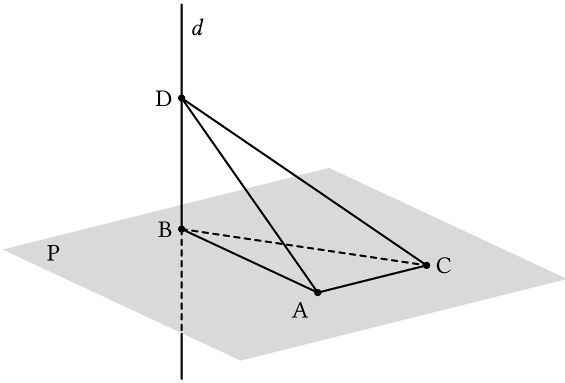

FIGURE 2

3. *a)* Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du *bicoin* ABCD.

   b) On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du *bicoin* ABCD.

PARTIE B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A$(3\,;1\,;-5)$ et la droite d de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t+9 \\ z = t-3 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A.
2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B$(5\,;5\,;-1)$.
3. Justifier que le point C$(7\,;3\,;-9)$ appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

   a) Justifier que le triangle ABM est rectangle.

   b) Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.

   c) En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

On donne le point D(9 ; 1 ; 1) qui est un des deux points solutions de la question 4.c de la partie B. Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère. En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes.

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

— à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;

— si le cient a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;

— si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1. *a)* Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les événements R_1 et R_2.

   b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

   c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.

   d) Sachant que le cient a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = \mathbb{P}(\mathrm{R}_n)$.

   a) Recopier et compléter l'arbre pondéré de la figure 3 (aucune justification n'est attendue).

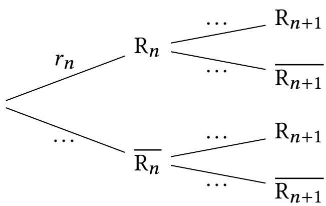

FIGURE 3

   b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0{,}75 \times r_n + 0{,}2$.

   c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8$.

   d) Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R. Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau. Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

— dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
— en suite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
— enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui sont respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématiques que les bassins sont à priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{MU}_n + \mathrm{C}$ où

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. On considère la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer P^2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser sa matrice inverse.
   b) Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   c) Calculer PDP.
   d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}$.

On admet par la suite que pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 3\times 0{,}5^n - 3\times 0{,}25^n \\ 0 & 0{,}25^n \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que la matrice $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie que $\mathrm{X} = \mathrm{MX} + \mathrm{C}$.
4. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice V_n par $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{X}$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{MV}_n$.
   b) On admet que, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{V}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{V}_0$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} -18\times 0{,}5^n + 9\times 0{,}25^n + 10 \\ -3\times 0{,}25^n + 4 \end{pmatrix}.$$

5. *a)* Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.
   b) Déterminer la limite de la suite (a_n).
   c) On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement.

Exercice 1
Commun à tous les candidats

Exercice 2
Commun à tous les candidats

Exercice 3
Commun à tous les candidats

Exercice 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 4
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

CORRIGÉ

Sujet 3

Centres étrangers & Pondichéry

13 juin 2019

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui envisage quatre situations relatives à une station de ski. Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspond à la réponse exacte. ***Aucune justification n'est demandée.*** *Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. Une étude statistique a établi qu'un client sur quatre pratique le surf. Dans une télécabine accueillant 80 clients de la station, la probabilité arrondie au millième qu'il y ait exactement 20 clients pratiquant le surf est :

   a. 0,560 **b.** 0,25 **c.** 1 **d.** 0,103

2. L'épaisseur maximale d'une avalanche, exprimée en centimètre, peut-être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 150$ cm et d'écart-type inconnu. On sait que $\mathbb{P}(X \geqslant 200) = 0{,}025$. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}(X \geqslant 100)$?

   a. On ne peut pas répondre car il manque des éléments dans l'énoncé. **b.** 0,025 **c.** 0,95 **d.** 0,975

3. Dans un couloir neigeux, on modélise l'intervalle de temps séparant deux avalanches successives, appelé temps d'occurence d'une avalance, exprimée en année, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle. On

a établi qu'une avalanche se déclenche en moyenne tous les 5 ans. Ainsi $\mathbb{E}(T) = 5$. La probabilité $P(T \geqslant 5)$ est égale à :

a. 0,5 **b.** $1 - e^{-1}$ **c.** e^{-1} **d.** e^{-25}

4. L'office de tourisme souhaite effectuer un sondage pour estimer la proportion de clients satisfaits des prestations offertes dans la station de ski. Pour cela, il utilise un intervalle de confiance de longueur 0,04 avec un niveau de confiance de 0,95. Le nombre de clients à interroger est :

   a. 50 **b.** 2 500 **c.** 25 **d.** 625

Exercice 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme de la figure 1 pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1, il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

```
Pour N allant de 1 à 12
   U ←
Fin Pour
```

Figure 1

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0{,}7$ puis pour $u_1 = 0{,}8$. Voici les valeurs obtenues.

   Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0{,}7$? Et si $u_1 = 0{,}8$?

Pour $u_1 = 0{,}7$	Pour $u_1 = 0{,}8$
0,4	0,6
0,2	0,8
−0,2	2,2
−2	10
−13	59
−92	412
−737	3295
−66341	29654
−729752	3261928
−8757025	39143135
−113841326	508860754

FIGURE 2

PARTIE B

On considère la suie (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$\mathrm{F}(x) = (-1 - x)\mathrm{e}^{1-x}$$

   est une primitive sur l'intervalle $[0\,;1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.
2. En déduire que $\mathrm{I}_1 = \mathrm{e} - 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a

$$\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n - 1.$$

Utiliser cette formule pour calculer I_2.

4. *a)* Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a

$$0 \leqslant x^n \mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n \mathrm{e}.$$

b) Justifier que

$$\int_0^1 x^n \mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n!$ le nombre défini, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par

$$1! = 1, \quad 2! = 2\times 1 \quad \text{et si } n \geqslant 3, \quad n! = n = (n-1)\times\cdots\times 1.$$

On a ainsi par exemple

$$3! = 3\times 2\times 1 = 3\times(2\times 1) = 3\times 2!$$
$$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 4\times(3\times 2\times 1) = 4\times 3!$$
$$8! = 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 8\times(7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1) = 8\times 7!.$$

Et, plus généralement :

$$(n+1)! = (n+1)\times n!.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a
$$u_n = n!(u_1 - \mathrm{e} + 2) + \mathrm{I}_n.$$
On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a
$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_{n+1} = (n = 1)\mathrm{I}_n - 1.$$

2. On admet que $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$.

Exercice 3 (5 points)
Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$. Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\frac{1}{z}$ soient alignés. Sur le graphique de la figure 3, le point A a pour affixe 1.

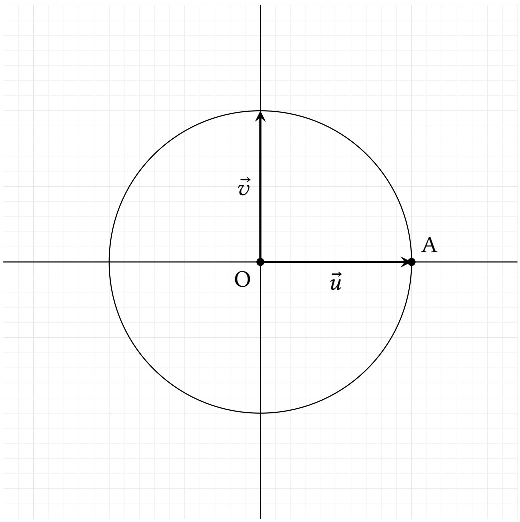

FIGURE 3

Partie A. Étude d'exemples

1. **Un premier exemple**

   Dans cette question, on pose $z = \mathrm{i}$.

   a) Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

   b) Placer les points N_1, d'affixe z^2 et P_1 d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique de la figure 3 page précédente. On remarque que dans ce cas les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. **Une équation**

   Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z,

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

3. **Un deuxième exemple**

   Dans cette question, on pose $z = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   a) Déterminer la forme exponentielle de z, puis celle des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

   b) Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2 d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique de la figure 3 page précédente. On remarque que dans ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B. Étude du cas général

Soit z un nombre complexe non nul. On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

1. Établir que, pour tout nombre complexe z différent de 0, on a

$$z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

2. On rappelle que si $\overrightarrow{\mathrm{U}}$ est un vecteur non nul et $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ un vecteur, d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{\mathrm{U}}}$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{V}}}$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{U}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\overrightarrow{\mathrm{V}}} = kz_{\overrightarrow{\mathrm{U}}}$. En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définies ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y désignent des nombres réels. Justifier que

$$z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + \mathrm{i}(2xy + y).$$

4. *a)* Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que points A, N et P soient alignés.

   b) Tracer cet ensemble de points sur le graphique de la figure 3 page 33.

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6 (voir la figure 4).

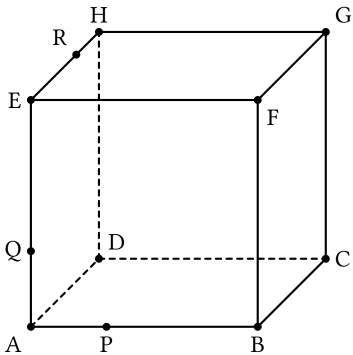

FIGURE 4

Les points P, Q et R sont définis par

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{HR}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{HE}}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $(\mathrm{A}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ avec

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \text{et} \quad \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AE}}.$$

Dans ce repère, on a par exemple, $\mathrm{B}(6\,;0\,;0)$, $\mathrm{F}(6\,;0\,;6)$ et $\mathrm{R}(0\,;4\,;6)$.

1. *a)* Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.
   b) Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}(1\,;b\,;c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR).
   c) En déduire qu'une équation du plan (PQR) est $x - y + z - 2 = 0$.
2. *a)* On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b) En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\,;\frac{10}{3}\,;\frac{8}{3}\right)$.
   c) Calculer la distance ΩI.
3. On considère les points J(6 ; 4 ; 0) et K(6 ; 6 ; 2).
   a) Justifier que le point J appartient au pplan (PQR).
   b) Vérifier que les droites JK) et (QR) sont parallèles.
   c) Sur la figure 4 page précédente, tracer la section du cube par le plan (PQR). On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40.

Partie A

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Sans justifier, donner deux nombres premiers x et y tels que $40 = x + y$.
2. On considère l'équation $20x + 19y = 40$, où x et y désignent deux entiers relatifs. Résoudre cette équation.
3. Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque $40 = 2^2 + 6^2$. On veut savoir si 40 est aussi différence de deux carrés, autrement dit on s'intéresse à l'équation $x^2 - y^2 = 40$, où x et y désignent deux entiers naturels.

   a) Donner la décomposition de 40 en produit de facteurs premiers.

b) Montrer que, si x et y désignent des entiers naturels, les nombres $x - y$ et $x + y$ ont la même parité.

c) Déterminer toutes les solutiosn de l'équation $x^2 - y^2 = 40$, où x et y désignent deux entiers naturels.

Partie B. Sommes de cubes

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels. Par exemple :

$$13 = 4^3 + 7^3 + 7^3 - 9^3 - 2^3$$
$$13 = -1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 2^3$$
$$13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3.$$

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « somme de cubes » à la place de « somme ou différence de cubes d'entiers naturels ». Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en somme de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en somme de 4 cubes.

1. *a)* En utilisant l'égalité $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$, donner une décomposition de 40 en somme de 5 cubes.

   b) On admet que pour tout entier naturel n on a

$$6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3.$$

   En déduire une décomposition de 48 en somme de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en somme de 5 cubes, différente de celle donnée en B.1.a.

2. Le nombre 40 est une somme de 4 cubes : $40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3$. On veut savoir si 40 peut être décomposé en somme de 3 cubes.

   a) Recopier et completer sans justifier le tableau de la figure 5 page suivante.

   b) On déduit du tableau précédent que, pour tout entier naturel n, l'entier naturel n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à -1. Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en somme de 3 cubes.

Reste de la division euclienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclienne de n^3 par 9					1				

FIGURE 5

Exercice 1
Commun à tous les candidats

Exercice 2
Commun à tous les candidats

Exercice 3
Commun à tous les candidats

Exercice 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 4
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sujet 4

Antilles Guyanne

18 juin 2019

Exercice 1 (6 points)
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée sur la figure 1 page suivante. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $\mathrm{A}(0\,;0{,}5)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point $\mathrm{B}(10\,;1)$.

1. Justifier que $a = 1$. On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}.$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

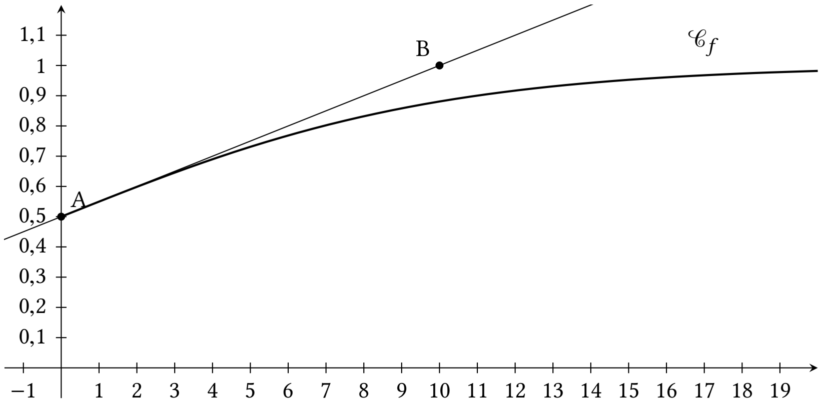

Figure 1

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000. Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'invividus équipés après x années. Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'indivius équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. *a)* Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\,;+\infty[$.
   b) Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
   c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé. Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

4. On définit la proportion moyenne d'invidus équipés entre 2008 et 2010 par

$$m = \frac{1}{2}\int_{8}^{10} p(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

a) Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}.$$

b) En déduire une primitive de la fonction p sur $[0\,;+\infty[$.

c) Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.

Exercice 2 (5 points)
Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépenantes.

Alex et Élisa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.

On considère un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère : O(0 ; 0 ; 0), P(0 ; 10 ; 0), Q(0 ; 11 ; 1), T(10 ; 11 ; 1), U(10 ; 10 ; 0) et V(10 ; 0 ; 0). La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU (voir figure **??** page ??).

Les deux drônes sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :

- le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec A(2 ; 4 ; 0,25) et B(2 ; 6 ; 0,75) ;
- le drone d'Élisa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec C(4 ; 6 ; 0,25) et D(2 ; 6 ; 0,25).

Partie A. Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB.
2. *a)* Justifier que le vecteur $\vec{n}(0\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).

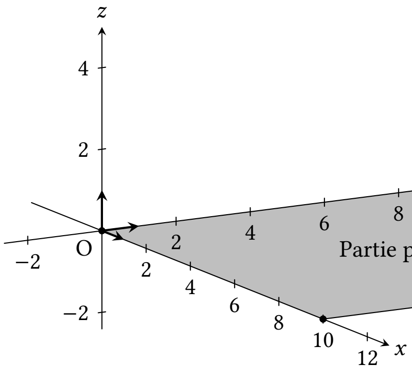

FIGURE 2

b) En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).

3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2\,;\,\frac{37}{3}\,;\,\frac{7}{3}\right)$.

4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

PARTIE B. DISTANCE MINIMALE ENTRE LES DEUX TRAJECTOIRES

Pour éviter une collision entre les deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones. L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée. Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD). Il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = b\overrightarrow{CD}$. On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2-2b\,;\,2-2a\,;\,-0{,}5a)$.

2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD). Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.

3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.

Exercice 3 (4 points)
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre afirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le nombre complexe $c = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et les points S et T d'affixes respectives c^2 et $\frac{1}{c}$.

1. **Affirmation 1**
   Le nombre c peut s'écrire $c = \frac{1}{4}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$.
2. **Affirmation 2**
   Pour tout entier naturel n, c^{3n} est un nombre réel.
3. **Affirmation 3**
   Les points O, S et T sont alignés.
4. **Affirmation 4**
   Pour tout entier naturel non nul n,
$$|c| + \left|c^2\right| + \cdots + |c^n| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match. On dispose des informations suivantes :

— 56 % des téléspectateurs ont regardé le match ;
— un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission ;
— 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission.

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les événements :

— M : « le téléspectateur a regardé le match » ;
— E : « le téléspectateur a regardé l'émission ».

On note x la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Déterminer la probabilité de $\mathrm{M} \cap \mathrm{E}$.
3. *a)* Vérifier que $\mathbb{P}(\mathrm{E}) = 0{,}44x + 0{,}14$.
   b) En déduire la valeur de x.
4. Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il ait regardé le match ?

Partie B

Pour déterminer l'audience des chaînes de télévision, un institut de sondage recueille, au moyen de boîtiers individuels, des informations auprès de milliers de foyers français.

Cet institut décide de modéliser le temps passé, en heure, par un téléspectateur devant la télévision le soir du match, par une variable aléatoire T suivant la loi normale d'espérance $\mu = 1{,}5$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}5$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'un téléspectateur ait passé entre une heure et deux heures devant sa télévision le soir du match ?
2. Déterminer l'arrondi à 10^{-2} du réel t tel que $\mathbb{P}(\mathrm{T} \geqslant t) = 0{,}066$. Interpréter le résultat.

Partie C

La durée de vie d'un boîtier individuel, exprimée en année, est modélisée par une variable aléatoire notée S qui suit une loi exponentielle de paramètre λ

strictement positif. On rappelle que la densité de probabilité de S est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

L'institut de sondage a constaté qu'un quart des boîtiers a une durée de vie comprise entre un et deux ans. L'usine qui fabrique les boîtiers affirme que leur durée de vie moyenne est supérieure à trois ans. L'affirmation de l'usine est-elle correcte ? La réponse devra être justifiée.

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie l'évolution quotidienne des conditions météorologiques d'un village sur une certaine période. On suppose que, pour un jour donné, il existe trois états météorologiques possibles : « ensoleillé », « nuageux sans pluie » et « pluvieux ».

On sait que :

— si le temps est ensoleillé un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,5 et celle qu'il soit pluvieux est 0,1 ;

— si le temps est nuageux sans pluie un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,2 et celle qu'il soit pluvieux est 0,7 ;

— si le temps est pluvieux un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,6 et celle qu'il soit ensoleillé 0,2.

Pour tout entier naturel n, on note les événements :

— A_n : « le temps est ensoleillé au bout de n jours » ;

— B_n : « le temps est nuageux sans pluie au bout de n jours ;

— C_n : « le temps est pluvieux au bout de n jours ».

Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n, b_n et c_n les probabilités des événements A_n, B_n et C_n. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$. On suppose qu'initialement, le temps est ensoleillé. On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. *a)* Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}1b_n + 0{,}2c_n.$$

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = 0{,}3a_n - 0{,}1b_n + 0{,}2.$$

On admet que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}2$.

2. On considère les matrices

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

a) Justifier que pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{MU}_n + \mathrm{R}.$$

b) Soit $\mathrm{Y} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right)$ tel que $\mathrm{Y} = \mathrm{MY} + \mathrm{R}$. Démontrer que $\alpha = \beta = 0{,}25$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{Y}$.

a) En utilisant la question 2, vérifier que, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{MV}_n.$$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif,

$$\mathrm{V}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{V}_0.$$

4. On admet que, pour tout entier naturel strictement positif n,

$$\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} 2 \times 0{,}2^n - 0{,}1^n & 0{,}1^n - 0{,}2^n \\ 2 \times 0{,}2^n - 2 \times 0{,}1^n & 2 \times 0{,}1^n - 0{,}2^n \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer l'expression de a_n en fonction de l'entier strictement positif n.

b) Déterminer la limite de la suite (a_n).

5. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$c_n = 0{,}5 + 3 \times 0{,}1^n - 3{,}5 \times 0{,}2^n.$$

La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours peut-elle dépasser 0,5 ?

Exercice 1
Commun à tous les candidats

Exercice 2
Commun à tous les candidats

Exercice 3
Commun à tous les candidats

Exercice 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 4
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

CORRIGÉ

Sujet 5

Polynésie

19 juin 2019

Exercice 1 (3 points)
Commun à tous les candidats

Exercice 2 (3 points)
Commun à tous les candidats

Exercice 3 (4 points)
Commun à tous les candidats

Exercice 4 (4 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 4 (4 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 1
Commun à tous les candidats

Exercice 2
Commun à tous les candidats

Exercice 3
Commun à tous les candidats

Exercice 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 4
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

ÉNONCÉ

Sujet 6

Asie

20 juin 2019

Exercice 1 (3 points)
Commun à tous les candidats

Exercice 2 (3 points)
Commun à tous les candidats

Exercice 3 (4 points)
Commun à tous les candidats

Exercice 4 (4 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 4 (4 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 1

Commun à tous les candidats

Exercice 2

Commun à tous les candidats

Exercice 3

Commun à tous les candidats

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

ÉNONCÉ

Sujet 7

Métropole

21 juin 2019

Exercice 1 (6 points)
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}).$$

1. *a)* Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, une unique solution, qu'on note α.
2. En remarquant que, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposés.

Partie B

Partie C

Exercice 2 (5 points)
Commun à tous les candidats

Exercice 3 (4 points)
Commun à tous les candidats

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 1

Commun à tous les candidats

1. *a)* Nous savons que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

De plus

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = +\infty.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x = -\infty$, nous concluons que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

b) La fonction f est de la forme $u \circ (v + w)$ où u, v et w sont les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ définis par $u(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x$, $v(x) = \mathrm{e}^x$ et $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x).$$

Soit $x > 0$. On a alors $-x < x$ et la fonction exponentielle étant strictement croissante, il vient $\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^x$, d'où $f'(x) < 0$. De plus $f'(0) = 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Remarque. Voici deux autres méthodes pour étudier le signe de f'.

Le première méthode consiste à factoriser $f'(x)$ par e^{-x}, ce qui donne $f'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{2x})$. Comme $\mathrm{e}^0 = 1$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante, on a $\mathrm{e}^{2x} > 1$ si $x > 0$, si bien que $f'(0) = 0$ et $f'(x) < 0$ si $x > 0$, d'où la décroissance stricte de f sur $[0\,;+\infty[$.

La deuxième méthode, moins élégante mais parfaitement valide, consiste à dériver f'. On obtient $f''(x) = -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x)$. La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, on a $f''(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$, donc f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus $f'(0) = 0$, il s'ensuit que $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$, d'où la conclusion.

c) La fonction f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f(0) = \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2} > 0$ car $e^0 = 1$, et $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$; par conséquent, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. Pour tout réel x, on a

$$f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = f(x).$$

Cette identité montre que $f(x) = 0$ si et seulement si $f(-x) = 0$; en d'autres termes, les solutions négatives de l'équation $f(x) = 0$ sont les oppposés de ses solutions positives. En définitive, les solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$ sont $-\alpha$ et α.

Partie A

1. La hauteur d'un arceau est, en mètre, égal à $f(0) = \frac{7}{2}$, soit 3,5 m.

2. *a)* À l'aide de la formule de f' établie à la question A.1.b, nous obtenons, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}4(1 + f'(x)^2) &= 4 + (e^{-x} - e^{x})^2\\ &= 4 + e^{-2x} - 2 + e^{2x}\\ &= e^{-2x} + 2 + e^{2x}\\ &= (e^{-x} + e^{x})^2,\end{aligned}$$

d'où

$$1 + f'(x)^2 = \frac{1}{4}(e^{x} + e^{-x})^2.$$

b) Puisque $e^{x} + e^{-x}$ est positif sur $\mathbb{R}$, on a $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$, donc

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} e^{x} + e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}[e^{x} - e^{-x}]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}).$$

Du fait de la symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des ordonnées, la longueur d'un arceau, en mètre, est égal à 2I, soit $e^{\alpha} - e^{-\alpha}$.

Partie B

1. L'aire de la façade nord est égale à l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = \alpha$. De plus, la fonction f est positive sur l'intervalle $[-\alpha\,;\alpha]$ et la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc l'aire de la surface nord, en m^2, est donnée par $2\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$. La façade sud a le même profil. Il faut cependant retirer l'aire de la porte, soit 2 m^2. Nous concluons donc que l'aire $\mathscr{A}$ de la bâche nécessaire pour couvrir les façades sud et nord est, en m^2, donnée par la formule
$$\mathscr{A} = 4\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - 2.$$

2. D'après la question précédente, on a
$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 4\int_0^\alpha \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x - 2\\ &= \int_0^\alpha 14 - 2\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - 2\\ &= \left[14x - 2\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\alpha - 2\\ &= 14\alpha - 2(\mathrm{e}^\alpha - \mathrm{e}^{-\alpha}) - 2.\end{aligned}$$

   La partie recouvrant le dessus de la serre est un rectangle dont une dimension est $3 \times 1{,}50$ m $= 4{,}50$ m et dont l'autre dimension est la longueur d'un arceau, soit $\mathrm{e}^\alpha - \mathrm{e}^{-\alpha}$. Ce rectangle a donc, en m^2, une aire égale à $4{,}5(\mathrm{e}^\alpha - \mathrm{e}^{-\alpha})$.

   Finalement, l'aire totale des trois parties constituant la serre est égale à $14\alpha - 2(\mathrm{e}^\alpha - \mathrm{e}^{-\alpha}) - 2 + 4{,}5(\mathrm{e}^\alpha - \mathrm{e}^{-\alpha})$, soit
$$14\alpha + 2{,}5(\mathrm{e}^\alpha - \mathrm{e}^{-\alpha}) - 2.$$

   En substituant 1,92 à α dans la formule précédente et en arrondissant au m^2 le résultat obtenu, nous concluons qu'il faut une bâche de 42 m^2 pour réaliser la serre.

Exercice 2

Commun à tous les candidats

Patience…

Exercice 3

Commun à tous les candidats

Patience…

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Patience…

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Patience…